E.N.S.I. DE CHIMIE SUD option TB 1979

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

N.B. — *L'épreuve se compose de trois parties entièrement indépendantes.*

La clarté de présentation et de rédaction de la copie sera un élément important de la note attribuée.

En particulier les calculs numériques devront être présentés avec le plus grand soin. Les candidats devront *indiquer sur leur copie le moyen de calcul utilisé et sa précision (tables de logarithmes, calculatrice électronique, ...).*

I

Pour tout entier $n > 0$, on note u_n la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < e$ par :

$$\begin{cases} u_n(x) = \left(1 + \dfrac{1}{n} \operatorname{Log} \dfrac{1}{|x|}\right)^{-n^2} & \text{si } x \neq 0 \\ u_n(0) = 0 \end{cases}$$

1° Étudier la continuité et la dérivabilité de u_n en 0.

2° Montrer que l'ensemble des valeurs de x telles que la série

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

soit convergente, est un intervalle ouvert U de $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

3° *a.* Démontrer que, pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, on a l'inégalité :

$$t - \frac{t^2}{2} \leqslant \operatorname{Log}(1+t) \leqslant t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$$

.../...

b. En déduire un encadrement de $u_n(x)$ pour tout $x \in U$ puis la convergence normale de S sur tout intervalle fermé contenu dans U.

4° *a.* En utilisant 3° *b*, montrer que, pour tout $x \in U$ et pour tout $n > 0$, le reste $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ satisfait aux inégalités :

$$\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}^2|x| + \frac{1}{3n}\operatorname{Log}^3|x|\right) \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}^2|x|\right)$$

b. En déduire un équivalent de $R_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini.

c. Calculer une valeur approchée à 10^{-5} près de la somme de la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$$

II

1° Discuter suivant les valeurs du nombre réel α la nature de l'intégrale

$$I_\alpha = \int_1^{+\infty} \operatorname{Log}(1+x^2)\,\frac{dx}{x^{2\alpha}}$$

2° Calculer la valeur I_1 de I_α pour $\alpha = 1$.

3° On se propose de calculer l'intégrale $I_{\frac{3}{4}}$ en fonction de l'intégrale

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{t^2\,dt}{1+t^4}$$

a. En effectuant dans $I_{\frac{3}{4}}$ un changement de variable, puis en intégrant par parties, montrer que :

$$I_{\frac{3}{4}} = \lambda + \mu J$$

où λ et μ sont des constantes que l'on déterminera.

b. Montrer que les intégrales

$$J \text{ et } K = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^4}$$

sont égales.

4° *a.* On pose $f(t) = \frac{1}{1+t^4}$. Décomposer $f(t)$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et déterminer une primitive de f.

b. On rappelle que : $\operatorname{Arctg}(u) + \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Montrer que $K = \varphi + \theta\pi$ où φ et θ sont deux constantes que l'on déterminera.

En déduire la valeur de $I_{\frac{3}{4}}$.

5° *a.* En prenant pour pas $\frac{1}{10}$, calculer une valeur approchée de K par la méthode des trapèzes.

On rappelle que l'erreur de méthode due à l'application de la formule des trapèzes sur le segment [0 ; 1] est telle que :

$$|\varepsilon| \leqslant \frac{h^2}{12} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f''(t)|$$

b. Calculer la fonction dérivée seconde de f et étudier ses variations sur l'intervalle [0 ; 1]. Montrer qu'elle admet sur cet intervalle un minimum dont on calculera une valeur approchée.

c. En déduire que $|\varepsilon|$ est inférieure à 2.10^{-3}.

6° Comparer cette valeur avec celle trouvée au 4° *b*.

III

1° *a.* Développer en série entière de la variable x la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{9}{x^3 - 3x + 2}$$

b. Déterminer le rayon de convergence de cette série.

2° Pour tout entier naturel n, on note a_n le coefficient de x^n dans le développement précédent.

Calculer la valeur du déterminant :

$$H_n = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+2} & a_{n+3} \\ a_{n+1} & a_{n+3} & a_{n+4} \\ a_{n+2} & a_{n+4} & a_{n+5} \end{vmatrix}$$

3° *a.* Établir une relation entre a_n, a_{n+2} et a_{n+3} pour tout entier naturel n.

b. Expliquer le résultat obtenu à la question 2°.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail